

NCS20210607 项目第二次模拟测试卷

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	A	A	B	C	B	D	C	A	D	C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分。

13. $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

14. 108

15. $a \in (-\infty, -1]$

16. $\frac{1}{2}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. 【解析】(I) 由 $\sin A = \cos B$, A 为钝角, 所以 $A - B = \frac{\pi}{2}$;3 分

因为 $C = 2B$, $A - B = \frac{\pi}{2}$, $A + B + C = \pi$,

知 $A = \frac{3\pi}{4} - \frac{C}{2}$, $B = \frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$;6 分

(II) 由 (I) 知 $C = \frac{\pi}{4}$, 所以 $A = \frac{5\pi}{8}$, $B = \frac{\pi}{8}$;8 分

由正弦定理知: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

所以 $a = 4 \sin \frac{5\pi}{8}$, $b = 4 \sin \frac{\pi}{8}$,10 分

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 8 \sin \frac{5\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{4} = 8 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{4} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 2$ 12 分

18. 【解析】(I) 证明: 因为折叠前 $BD \perp AC$, 所以 $AC \perp BE$, $AC \perp DE$,

因为 $DE \cap BE = E$, 所以 $AC \perp$ 平面 BDE ,3 分

又 $AC \subset$ 平面 ABC , 平面 $DBE \perp$ 平面 ABC5 分

(II) 由 (I) 知, 平面 $DBE \perp$ 平面 ABC ,

过点 D 作 $DO \perp BE$, 则 $DO \perp$ 平面 ABC ,6 分

1. 当点 D 在面 ABC 内的投影 O 落在 $\triangle ABC$ 内时,

因为 $AB = 4$, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $CE = AE = 2\sqrt{3}$, $DE = BE = 2$,

因为 $\frac{OD}{DC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $DC = 4$, 所以 $OD = \sqrt{3}$,7 分

则 $BO = OE = 1$, 如图所示, 建立空间直角坐标系, 则 $B(1, 0, 0)$, $D(0, 0, \sqrt{3})$,

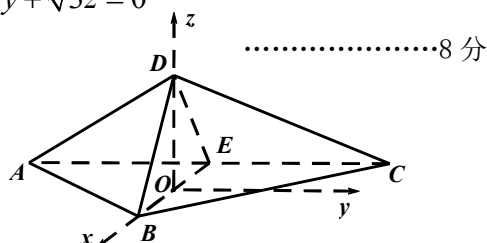
$C(-1, 2\sqrt{3}, 0)$, $E(-1, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{CD} = (1, -2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC} = (-2, 2\sqrt{3}, 0)$,

设平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} -2x + 2\sqrt{3}y = 0 \\ x - 2\sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$,

则 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, 1)$,

因为平面 BCE 的法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$,

所以 $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;10 分



2° 当点 D 在面 ABC 内的投影 H 落在 $\triangle ABC$ 外时, 因为面 $BDE \perp$ 面 ABC ,

所以点 H 在 BE 的延长线上, $Rt\triangle DHE$ 中, $DE = 2, DH = \sqrt{3} \Rightarrow HE = 1$.

如图以 E 为原点, EB, EC 所在直线分别为 x 轴, y 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $B(2, 0, 0), C(0, 2\sqrt{3}, 0), D(-1, 0, \sqrt{3}), E(0, 0, 0)$,

所以 $\vec{DB} = (3, 0, -\sqrt{3}), \vec{BC} = (-2, 2\sqrt{3}, 0)$,

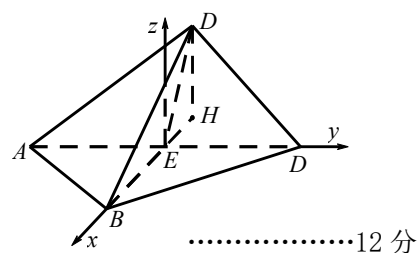
设平面 DBC 的法向量为 $\vec{m}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 由 $\begin{cases} \vec{m}_1 \cdot \vec{DB} = 0 \\ \vec{m}_1 \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases}$, 得到 $\begin{cases} 3x_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ -2x_1 + 2\sqrt{3}y_1 = 0 \end{cases}$,

令 $y_1 = 0$, 有 $\vec{m}_1 = (\sqrt{3}, 1, 3)$,

而平面 BCE 的一个法向量为 $\vec{m}_2 = (0, 0, 1)$,

$\cos \langle \vec{m}_1, \vec{m}_2 \rangle = \frac{|\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2|}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|} = \frac{3}{\sqrt{3+1+9} \times 1} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

所以二面角 $D-BC-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.



19. 【解析】(I) 由题: $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 4$, 又 $a^2 - b^2 = c^2$,

所以 $a = 2, b = 1$,4 分

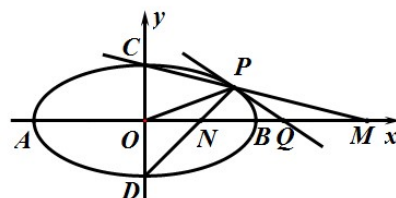
所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$5 分

(II) 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ 即 $x_0^2 = 4(1 - y_0^2)$,

不妨设 $C(0, 1), D(0, -1)$, 直线 PC : $y = \frac{y_0 - 1}{x_0}x + 1$,

令 $y = 0$ 得 $x = \frac{x_0}{1 - y_0}$, 故 $M(\frac{x_0}{1 - y_0}, 0)$; 同理可求 $N(\frac{x_0}{1 + y_0}, 0)$7 分

则 $k_1 k_2 = \frac{y_0 - 1}{x_0} \cdot \frac{y_0 + 1}{x_0} = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2} = -\frac{1}{4}$, $k_3 = \frac{y_0}{x_0}$, 所以 $k = -\frac{x_0}{4y_0}$,8 分



所以直线 l 为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(x - x_0)$, 令 $y = 0$ 得 $x = \frac{x_0^2 + 4y_0^2}{x_0}$, 又 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$,

故 $x = \frac{4}{x_0}$ 即 $Q(\frac{4}{x_0}, 0)$10 分

$\|MQ\| - \|NQ\| = |\frac{x_0}{1-y_0} + \frac{x_0}{1+y_0} - \frac{8}{x_0}| = |\frac{2x_0}{(1+y_0)(1-y_0)} - \frac{8}{x_0}|$ 11 分

又 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ 即 $x_0^2 = 4(1 - y_0^2)$, 代入上式得: $\|MQ\| - \|NQ\| = |\frac{2x_0}{\frac{x_0^2}{4}} - \frac{8}{x_0}| = 0$12 分

20. 【解析】(I) (i) 记事件 A 为“甲答对了某道题”, 事件 B 为“甲确实会做”,

则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$;3 分

(ii) X 可取 0、1、2、3、4, 甲答对某道题的概率为 $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$,5 分

则 $X \sim B(4, \frac{3}{5})$, $P(X = k) = C_4^k (\frac{3}{5})^k (\frac{2}{5})^{4-k} (k = 0, 1, 2, 3, 4)$,

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

则 $E(X) = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$8 分

(II) 记事件 A_i 为“甲答对了 i 道题”, 事件 B_i 为“乙答对了 i 道题”, 其中甲答对某道题的概率为

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}(1+p)$, 答错某道题的概率为 $1 - \frac{1}{2}(1+p) = \frac{1}{2}(1-p)$

则 $P(A_1) = C_2^1 \cdot \frac{1}{2}(1+p) \cdot \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}(1-p^2)$, $P(A_2) = [\frac{1}{2}(1+p)]^2 = \frac{1}{4}(1+p)^2$,

$P(B_0) = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$, $P(B_1) = C_2^1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$,

所以甲答对题数比乙多的概率为

$P(A_1B_0 \cup A_2B_1 \cup A_2B_0) = P(A_1B_0) + P(A_2B_1) + P(A_2B_0)$
 $= \frac{1}{2}(1-p^2) \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{4}(1+p)^2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{4}(1+p)^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} \cdot (3p^2 + 10p + 7) \geq \frac{15}{36}$ 11 分

解得 $\frac{2}{3} \leq p < 1$. 甲的亲友团助力的概率 p 的最小值为 $\frac{2}{3}$12 分

21. 【解析】证明：(I) $f'(x) = \sin x + x \cos x - \frac{a}{x}$,1 分

由题 $f'(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{2a}{\pi} = -1$, 所以 $a = \pi$2 分

故 $f(x) = x \sin x - \pi \ln x$, $f'(x) = \sin x + x \cos x - \frac{\pi}{x}$,

方法一： $f'(x) = \sin x + x \cos x - \frac{\pi}{x} < \sin x + \tan x \cdot \cos x - \frac{\pi}{x} = 2 \sin x - \frac{\pi}{x}$,

令 $g(x) = 2 \sin x - \frac{\pi}{x}$, 知 $g(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增,

所以 $g(x) < g(\frac{\pi}{2}) = 0$, 也即 $f'(x) < 0$,4 分

所以 $f(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, $f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \pi \ln \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (1 - \ln \frac{\pi^2}{4}) > 0$,

所以, 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) > 0$ 得证;6 分

方法二： $f'(x) = \sin x + x \cos x - \frac{\pi}{x} < x + x \cdot \cos x - \frac{\pi}{x} = x(1 + \cos x - \frac{\pi}{x^2})$,

令 $h(x) = 1 + \cos x - \frac{\pi}{x^2}$, $h'(x) = -\sin x + \frac{2\pi}{x^3}$, 知 $h'(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减,

所以 $h'(x) > h'(\frac{\pi}{2}) = \frac{16}{\pi^2} - 1 > 0$, 知 $h(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增,

所以 $h(x) < h(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{4}{\pi} < 0$, 也即 $f'(x) < 0$,4 分

所以 $f(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, $f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \pi \ln \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (1 - \ln \frac{\pi^2}{4}) > 0$,

所以, 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) > 0$ 得证;6 分

方法三： $f'(x) = \sin x + x \cos x - \frac{\pi}{x} = \sqrt{1+x^2} \sin(x+\varphi) - \frac{\pi}{x}$,

因为 $\sin(x+\varphi) \leq 1$, $f'(x) \leq \sqrt{1+x^2} - \frac{\pi}{x}$, 设 $g(x) = \sqrt{1+x^2} - \frac{\pi}{x}$, 显然 $g(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 单调

递增, $g(x) = \sqrt{1+x^2} - \frac{\pi}{x} < \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} - 2 < 0$, 所以 $f'(x) < 0$,4 分

所以 $f(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减, 故 $f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \pi \ln \frac{\pi}{2}$, 因为 $\ln \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}$,

所以 $f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \pi \ln \frac{\pi}{2} > 0$6 分

(II) 当 $n \in N, n \geq 2$ 时, $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$,

因为 $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n}$, 所以 $\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}) > \sin(1 + \frac{1}{n})$,8 分

则 $\frac{n+1}{n} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}) > \frac{n+1}{n} \sin(1 + \frac{1}{n})$, 由 (1) 知: $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $x \sin x > \pi \ln x$,

令 $x = \frac{k+1}{k}, (k = 2, \dots, n)$, $\frac{n+1}{n} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}) > \frac{n+1}{n} \sin(1 + \frac{1}{n}) > \pi \ln(n + \frac{1}{n})$,10 分

所以 $\frac{3}{2} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}) > \pi \ln \frac{3}{2}, \frac{4}{3} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}) > \pi \ln \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}) > \pi \ln \frac{n+1}{n}$,

相加得 $\frac{3}{2} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}) + \frac{4}{3} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}) + \dots + \frac{n+1}{n} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}) > \pi \ln \frac{n+1}{2}$ 12 分

22. 【解析】(I) 由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 知:

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 \sin \theta \cos \theta = \sqrt{3}$;3 分

曲线 C_1 的普通方程为 $x^2 + y^2 = 4$ 5 分

(II) 由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = \sqrt{3} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$,7 分

不妨设 $A(1, \sqrt{3}), B(\sqrt{3}, 1), C(-1, -\sqrt{3}), D(-\sqrt{3}, -1)$, 由图可知四边形 $ABCD$ 为矩形,

$AB = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1), BC = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$,

所以四边形面积 $S = AB \cdot BC = 4$ 10 分

23. 【解析】(I) $f(x) = |x - a + 1| + |x + b - 1| \geq |x - a + 1 - (x + b - 1)| = |a + b - 2|$,3 分

因为 $a, b \in (0, 1)$, 所以 $f(x) \geq 2 - a - b$, 当 $a - 1 \leq x \leq 1 - b$ 时取到最小值 $2 - a - b$,

所以 $c = 2 - a - b$ 即 $a + b + c = 2$;5 分

(II) 因为 $a + b + c = 2$, 所以 $(a + b + c)^2 = 4$ 即 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 4$,7 分

因为 $b^2 + c^2 \geq 2bc$, 所以 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq a^2 + 2bc + 2ab + 2bc + 2ac$ 即

$a^2 + 2ab + 4bc + 2ac \leq 4$ 10 分